НАДЕЖНОСТЬ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

УДК 621.874:531.314.5 https://doi.org/10.18503/1995-2732-2017-15-3-68-73

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ МОСТОВОГО КРАНА УРАВНЕНИЯМИ ЛАГРАНЖА II РОДА

Енин С.С., Омельченко Е.Я., Белый А.В., Фомин Н.В.

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Магнитогорск, Россия

Аннотация
Постановка задачи (актуальность работы): в статье выполнен анализ движения 3-массовой системы механизмов мостовых кранов. Акутальность работы заключается в использовании уравнений Лагранжа II рода для описания движения системы. Данный подход позволяет исследовать динамические свойства крановых механизмов, так как именно динамические нагрузки являются в большей степени причиной выхода из строя оборудования кранов. **Цель работы:** получение уравнений движения механизмов мостового крана для использования их при построении математических и компьютерных моделей крановых электроприводов. **Используемые методы:** применялся метод анализа объекта (мостового крана) путем синтеза его отдельных механизмов в единую 3-массовую систему для получения зависимостей скоростей и ускорений от других физических и технологических параметров. **Новизна:** система механизмов мостового крана рассматривается не отдельными элементами, а как взаимосвязанная система, в которой работа одного объекта оказывает влияние на работу других объектов системы. Использованы уравнения Лагранжа II рода для описания движения системы без каких-либо упрощений, что указывает на более точное описание процессов работы крана. **Результат:** в статье определены обобщенные координаты механизов подъема, перемещения грузовой тележки и моста. Определена кинетическая энергия механической системы и найдены обобщенные силы, действующие на каждый механизм. Составлены уравнения Лагранжа II рода по каждой обобщенной координате. Выведены уравнения движения каждого элемента системы, отражающие взаимные связи между ними. **Практическая значимость:** указаны возможности применения данных уравнения в дальнейших исследованиях систем мостовых кранов. На основе полученных уравнений можно строить точные математические и компьютерные модели для изучения движения механизмов мостовых кранов.

Ключевые слова: мостовой кран, уравнение Лагранжа II рода, обобщенная координата, кинетическая энергия системы, обобщенная сила, уравнение движения системы.

Введение

Одним из наиболее распространенных средств механизации погрузочно-разгрузочных работ в металлургическом производстве, на строительных площадках, в речных и морских портах, на железнодорожном транспорте являются грузоподъемные краны, обеспечивающие подъем груза, перемещение его на определенное расстояние и опускание с помощью грузозахватного устройства [1].

Анализ динамики крановых механизмов, как правило, сводится к анализу отдельных элементов с множеством упрощений. Например, в работе [2] при рассмотрении системы подъема груза не рассматривается влияние движения груза при его отклонениях от вертикальной оси на формирование нагрузки для системы привода механизма. В работе [3] приведена методика расчета параметров двигателя механизма подъема мостового крана, однако не учтены возможные колебания груза от движения грузовой тележки и моста, приводящие к дополнительным колебаниям момента двигателя.

Получение уравнений движения механизмов мостового крана через алгоритм использования уравнений Лагранжа позволяет в полной мере выявить закономерности и зависимости между переменными во всех режимах работы крана.

Уравнение Лагранжа второго рода имеет следующий вид [4]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,$$

где T – кинетическая энергия механической системы; Q_i – обобщенная сила, соответствующая i-й координате (может быть выражена как потенциальная энергия механической системы); q_i – обобщённая координата; $\dot{q}_i$ – обобщённая скорость; i=1, 2, … , k (механическая система имеет k обобщенных координат).

Определение кинетической энергии системы мостового крана

Если рассматривать механическую систему мостового крана (см. **рисунок**), то данная система имеет 5 степеней свободы, соответственно, чтобы описать систему уравнениями Лагранжа, необходимо иметь 5 обобщенных координат q_i и соответствующих им обобщенных скоростей $\dot{q}_i$:

- $q_1 = y_1$ – координата перемещения груза по вертикали (длина подвеса);
- $q_2 = x_2$ – координата перемещения грузовой тележки;
- $q_3 = x_3$ – координата перемещения моста;
- $q_4 = \alpha$ – координата углового перемещения груза по направлению движения тележки;
- $q_5 = \beta$ – координата углового перемещения груза по направлению движения моста.

Кинетическая энергия системы выражается в абсолютном движении через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Для каждого механизма мостового крана кинетическая энергия определяется выражениями:

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2} = \dfrac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} \\ T_2 = \dfrac{m_1 V_2^2}{2} = \dfrac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \\ T_3 = \dfrac{m_1 V_3^2}{2} = \dfrac{m_3 \dot{x}_3^2}{2} \\ T_4 = \dfrac{m_1 V_4^2}{2} = \dfrac{m_1\left(\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2\right)}{2} \\ T_5 = \dfrac{m_1 V_5^2}{2} = \dfrac{m_1\left(\dot{x}_5^2 + \dot{y}_5^2\right)}{2} \end{cases} \tag{1}$$

Перемещения груза по осям x и y выражаются через обобщенные координаты:

$$x_4 = x_2 - y_1 \sin\alpha; \; y_4 = y_1 \cos\alpha;$$

$$x_5 = x_3 - y_1 \sin\beta; \; y_5 = y_1 \cos\beta.$$

Если полученные уравнения подставить в систему (1), уравнения принимают вид

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} \\ T_2 = \dfrac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \\ T_3 = \dfrac{m_3 \dot{x}_3^2}{2} \\ T_4 = \dfrac{m_1\left(\left(x_2 - \dot{y}_1 \sin\alpha\right)^2 + \left(y_1 \dot{\cos}\alpha\right)^2\right)}{2} \\ T_5 = \dfrac{m_1\left(\left(x_3 - \dot{y}_1 \sin\beta\right)^2 + \left(y_1 \dot{\cos}\beta\right)^2\right)}{2} \end{cases}$$

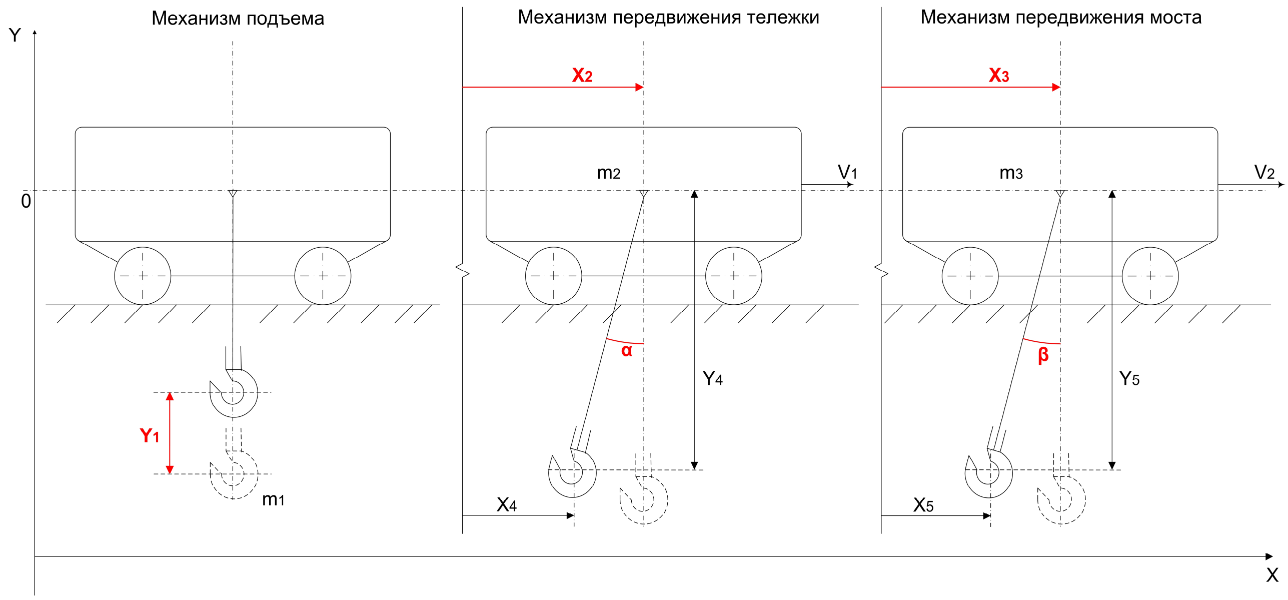
После ряда преобразований запишем выражения для определения кинетической энергии элементов системы

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} \\ T_2 = \dfrac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \\ T_3 = \dfrac{m_3 \dot{x}_3^2}{2} \\ T_4 = 1/2 m_1 \begin{pmatrix} \left(\dot{x}_2 - \dot{y}_1 \sin\alpha - y_1 \dot{\alpha}\cos\alpha\right)^2 + \\ + \left(\dot{y}_1 \cos\alpha - y_1 \dot{\alpha} \sin\alpha\right)^2 \end{pmatrix} \\ T_5 = 1/2 m_1 \begin{pmatrix} \left(\dot{x}_3 - \dot{y}_1 \sin\beta - y_1 \dot{\beta}\cos\beta\right)^2 + \\ + \left(\dot{y}_1 \cos\beta - y_1 \dot{\beta} \sin\beta\right)^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

После определения энергии элементов системы можно найти кинетическую энергию всей системы

$$T = \sum_{i=1}^{5} T_i;$$

$$T = 1/2\Big[m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2 + \\ + m_1\Big(\left(\dot{x}_2 - \dot{y}_1 \sin\alpha - y_1 \dot{\alpha}\cos\alpha\right)^2 + \\ + \left(\dot{y}_1 \cos\alpha - y_1 \dot{\alpha} \sin\alpha\right)^2\Big) + \\ + \Big(\left(\dot{x}_3 - \dot{y}_1 \sin\beta - y_1 \dot{\beta}\cos\beta\right)^2 + \\ + \left(\dot{y}_1 \cos\beta - y_1 \dot{\beta} \sin\beta\right)^2\Big)\Big]$$



Кинематическая схема механизмов мостового крана (с выделенными обобщенными координатами)

Определение обобщенных сил системы мостового крана

Для определения обобщенных сил надо сообщить системе такое возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_i, получая положительное приращение δq_i, вычислить на этом перемещении сумму элементарных работ всех действующих сил и подставить полученное выражение в выражение $\delta A_i = Q_i \delta q_i$, при этом коэффициент при δq_i и дает искомую величину обобщенной силы [5].

Определение обобщенных сил, соответствующих выбранным координатам:

$$\begin{cases} Q_1 = -F_1 + m_1 g \\ Q_2 = F \\ Q_3 = F_3 \\ Q_4 = -m_1 g y_1 \cos\alpha \\ Q_5 = -m_1 g y_1 \cos\beta \end{cases}$$

В данной систем уравнений силы F_1, F_2, F_3 являются внешними силами, которые прикладываются к механизмам подъема, перемещения тележки и моста соответственно. В частности, данные силы возникают в системах электроприводов механизмов.

Составление системы уравнений Лагранжа II рода

Система уравнений Лагранжа по каждой обобщенной координате имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_3} = Q_3 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_4}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_4} = Q_4 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_5}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_5} = Q_5 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial y_1} = F_1 - m_1 g \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_2} = F_2 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_3} = F_3 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \alpha} = -m_1 g y_1 \sin\alpha \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \beta} = -m_1 g y_1 \sin\beta \end{cases}$$

Если подставить все значения в уравнения Лагранжа и продифференцировать левые части, получится система дифференциальных уравнений движения механизмов мостового крана

$$\begin{cases} 1)\ m_1\ddot{y}_1 - m_1\ddot{x}_2\sin\alpha - m_1\ddot{x}_3\sin\beta - \\ \qquad -m_1\left(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\right)y_1 = -F_1 + m_1 g \\ 2)\ \left(m_1+m_2\right)\ddot{x}_2 - m_1\ddot{y}_1\sin\alpha - 2m_1\dot{\alpha}\dot{y}_1\cos\alpha + \\ \qquad +m_1\left(\dot{\alpha}^2\sin\alpha - \ddot{\alpha}\cos\alpha\right)y_1 = F_2 \\ 3)\ \left(m_1+m_3\right)\ddot{x}_3 - m_1\ddot{y}_1\sin\beta - 2m_1\dot{\beta}\dot{y}_1\cos\beta + \\ \qquad +m_1\left(\dot{\beta}^2\sin\beta - \ddot{\beta}\cos\beta\right)y_1 = F_3 \\ 4)\ m_1y_1^2\ddot{\alpha} - 2m_1y_1\dot{y}_1\dot{\alpha} + m_1y_1\ddot{x}_2\cos\alpha = \\ \qquad = -m_1 g y_1\sin\alpha \\ 5)\ m_1y_1^2\ddot{\beta} - 2m_1y_1\dot{y}_1\dot{\beta} + m_1y_1\ddot{x}_3\cos\beta = \\ \qquad = -m_1 g y_1\sin\beta \end{cases}$$

Выразив данную систему уравнений в форме Коши, получаются уравнения движения обобщенных координат для движения каждого механизма (2).

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \dfrac{-F_1 + m_1 g + m_1\ddot{x}_2\sin\alpha + m_1\ddot{x}_3\sin\beta + m_1y_1\left(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\right)}{m_1} \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{F_2 + m_1\ddot{y}_1\sin\alpha + 2m_1\dot{\alpha}\dot{y}_1\cos\alpha + m_1y_1\left(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha\right)}{m_1+m_2} \\ \ddot{x}_3 = \dfrac{F_3 + m_1\ddot{y}_1\sin\beta + 2m_1\dot{\beta}\dot{y}_1\cos\beta + m_1y_1\left(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta\right)}{m_1+m_2+m_3} \\ \ddot{\alpha} = \dfrac{-\ddot{x}_2\cos\alpha + 2\dot{y}_1\dot{\alpha} - g\sin\alpha}{y_1} \\ \ddot{\beta} = \dfrac{-\ddot{x}_3\cos\beta + 2\dot{y}_1\dot{\beta} - g\sin\beta}{y_1} \end{cases} \qquad (2)$$

Последняя система уравнений представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат [6].

Заключение

Полученные дифференциальные уравнения позволяют строить математические модели механизмов крана с учетом взаимного влияния узлов объекта. С учетом достижений современной вычислительной техники и программного обеспечения [7, 8] нет необходимости упрощения дифференциальных уравнений движения механизмов, в результате чего можно получить адекватную компьютерную модель, которая с достаточной точностью будет воспроизводить реальные процессы, протекающие при работе крана.

Однако данная система уравнений не описывает потери в узлах механической системы, учет которых является дальнейшим направлением развития тематики анализа движения механизмов мостового крана.

Список литературы

1. Александров М.П. Подъемно-транспортные машины: учебник для машиностроит. спец. вузов. 6-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 1985. 520 с.: ил.
2. Масандилов Л.Б. Электропривод подъемных кранов. М.: Изд-во МЭИ, 1998. 100 с. ISBN 5-7046-0227-4
3. Характеристики крановых электроприводов с несимметричными сопротивлениями в цепи ротора / Омельченко Е.Я., Сулейманов Р.Р., Енин С.С., Полетавкин А.А. //

Электрооборудование: эксплуатация и ремонт. 2014. №4. С. 19-25. (рецензируемое издание № 2189).
4. H. Goldstein, C. Poole, J. Safko. Classical Mechanics. Third Edition. Columbia University, University of South Carolina, 2000.
5. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. Изд. 20-е, стер. М.: Высш. шк., 2010. 416 с. ISBN 978-5-06-006193-2
6. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; под общ. ред. К.С. Колесникова. 3-е изд., стер. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 736 с.: ил. (Сер. Механика в техническом университете; Т. 1).
7. Черных И.В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink. 1-е издание, 2007 год, 288 стр., формат 17x24 см, мягкая обложка, ISBN 978-5-388-00020-0
8. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop. Modern Control Systems, 13th Edition. 2017. ISBN-13: 9780134407623

Поступила 12.04.17.
Принята в печать 25.07.17.

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

https://doi.org/10.18503/1995-2732-2017-15-3-68-73

THE MOTION OF BRIDGE CRANE MECHANISMS DESCRIBED WITH THE HELP OF LAGRANGE'S EQUATIONS OF SECOND KIND

Sergei S. Enin – Assistant Professor
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia. E-mail: enin_ss@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0313-6854

Evgenii Ya. Omelchenko – D.Sc. (Eng.), Professor
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia.

Alexei V. Beliy – Ph.D. (Eng.), Associate Professor
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia.

Nikolai V. Fomin – Assistant Professor
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia.

Abstract
Problem Statement (Relevance): This article analyses the motion of a three-mass system of bridge crane mechanisms. The relevance of this work is in the application of Lagrange's equations of second kind, which helped describe the system motion. Due to this approach, the authors could study the dynamic behaviour of the crane mechanisms since dynamic loads appear to be the prevailing cause of crane failures. **Objectives:** The objective of this research is to obtain the equations of motion for the bridge crane mechanisms, which can be used for mathematical and computer modelling of electrical drives for crane applications. **Methods Applied:** The analysis (of the bridge crane) conducted is based on combining separate mechanisms into a three-mass system in order to derive the dependencies of velocity and acceleration rates from other physical and process parameters. **Originality:** The mechanisms of a bridge crane are not examined as separate components but as an intergrated system where all the constituents influence each other. To describe the system motion without any simplifications, Lagrange's equations of second kind were applied. This indicates that the obtained description offers high accuracy. Findings: The article defines the generalized coordinates of the lifting mechanism, the trolley and the bridge. The kinetic energy of the mechanical system was determined, and the generalized forces found that impact each mechanism. Lagrange's equations of second kind were derived for each generalized coordinate. Equations of motion were derived for each component that prove the interrelated nature of the components. **Practical Relevance:** The authors indicate other possible applications for these equations for further study of bridge cranes. The derived equations can be used to build accurate mathematical and computer models, which can help learn more about the motion of bridge crane mechanisms.

Keywords: Bridge crane, Lagrange's equation of second kind, generalized coordinate, kinetic energy of the system, generalized force, equation of the system motion.

References

1. Aleksandrov M.P. *Podyemno-transportnye mashiny: Ucheb. dlya mashinostroit. vuzov* [Handling machinery: Textbook for engineering universities]. 6th edition, revised. Moscow: Vysshaya Shkola, 1985, 520 p. (In Russ.)
2. Masandilov L.B. *Electroprivod podyemnykh kranov* [Electrical drives for crane applications]. Moscow: Publishing House of Moscow Power Engineering Institute, 1998, 100 p. ISBN 5-7046-0227-4 (In Russ.)
3. Omelchenko E.Ya., Suleymanov R.R., Enin S.S., Poletavkin A.A. Speed-torque characteristics of crane electrical drives with unbalanced impedances in the rotor circuit. *Electrooborudovanie: expluatatcia i remont* [Electrical equipment: operation and maintenance], 2014, no. 4, pp. 19–25. (In Russ.)
4. H. Goldstein, C. Poole, J. Safko. Classical Mechanics. Third Edition. Columbia University, University of South Carolina, 2000.
5. Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Brief course in theoretical mechanics]. 20th edition. Moscow: Vysshaya Shkola, 2010, 416 p. ISBN 978-5-06-006193-2 (In Russ.)
6. Drong V.I., Dubinin V.V., Ilyin M.M. et al. *Kurs teoret-*

icheskoy mekhaniki: Uchebnik dlya vuzov [A course in theoretical mechanics: Textbook for university students]. 3rd edition, ed. by K.S. Kolesnikov. Moscow: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 2005, 736 p. (In Russ.)
7. Chernykh I.V. *Modelirovanie electrotechnicheskikh ustroystv v MATLAB, SimPowerSystems i Simulink.* [Simulation of electrical components in MATLAB, SimPowerSystems and Simulink]. 1st edition, 2007, 288 p. ISBN 978-5-388-00020-0
8. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop. Modern Control Systems, 13th Edition. 2017. ISBN-13: 9780134407623

Received 12/04/17
Accepted 25/07/17

Образец для цитирования

Описание движения механизмов мостового крана уравнениями Лагранжа II рода / Енин С.С., Омельченко Е.Я., Белый А.В., Фомин Н.В. // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. 2017. Т.15. №3. С. 68–73. https://doi.org/10.18503/1995-2732-2017-15-3-68-73

For citation

Enin S.S., Omelchenko E.Ya., Beliy A.V., Fomin N.V. The motion of bridge crane mechanisms described with the help of lagrange's equations of second kind. *Vestnik Magnitogorskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. G.I. Nosova* [Vestnik of Nosov Magnitogorsk State Technical University]. 2017, vol. 15, no. 3, pp. 68–73. https://doi.org/10.18503/1995-2732-2017-15-3-68-73